Bulletin of the **S**ection of **L**ogic
Volume 3/1 (1974), pp. 25–28
reedition 2012 [original edition, pp. 25–29]

August Pieczkowski

USER DEM HEGRIFF DER THEORIE

This is a lecture read at the V Conference Logical Calculi, Wrocław, November 1973.

Die vorliegende Arbeit bildet eine wesentliche Verallgemeinerung von [2]. Der Begriff der allgemainen Theories aus [2] beruht auf einer Begründung der Äquivalenz zweier Theorien. Nach eingehender Analyse kommt man jedoch zu dem Resultat, da die Erklarung dieser Äquivalenz zu eng ist. Sie erlaubt nur den Vergleich solcher Theorien, fur welche alle Konstanten der einen explizit definierbar auf Ground der anderen sind.

Mit T bezeichnen wir die Menge aller implikativen Theorien, d.h. der logischen und mathematischen Theorien L, die unter folgenden Regeln abgeschlossen sind ($\to$ bedeutet eine logische Konstante der Theorie L, die Implikation genannt wird):

$$\text{I. } \frac{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}, \quad \text{II. } \alpha \to \alpha, \quad \text{III. } \frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta},$$
$$\text{IV. } \frac{\alpha_j \to \beta_j, \beta_j \to \alpha_j}{0(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \to 0(\beta_1, \ldots, \beta_k)} \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

wobei 0 eine beliebige logische Konstante der Theorie L ist. Unsere Betrachtungen betreffen alle Theorien der Menge T.

Ween $\alpha \to \beta \in L$ und $\beta \to \alpha \in L$, dann sagt man, daß α in der Theorie L in bezug auf die Implikation $\to$ äquivalent mit β ist und schreibt kurz $\alpha =_L \beta$. Fur jede Theorie L bedeutet $s(L)$ die Ausdrucksmenge von L. Unter einer Anschließungsregel für eine rekursive Menge M von Ausdrücken, auf Frund einer Theorie L, verstehen wir eine Regel, die uns gestattet, die Ausdrucke aus M als neue Satze anzunehmen (falls L axiomatisch ist, wird M zu der Axiomenmenge von L hinzugefugt). Anschließungsregeln und Ersetzungsregeln werden insgesammt als spezielle

Regeln bezeichnet. Die Theorie, die aus L durch Hinzufgung einer Menge R von speziellen Regelen und Erweiterung der Anwendungen der Regeln von L und I–IV entsteht, nennen wir Erweiterung von L und R und vezeichnen sie (die Menge ihrer Sätze) mit $Er[L, R]$. Unter einer zulässigen Definition eines Symbols a auf Grund einer Theorie L bzg. einer Implkation $\rightarrow$ wollen wir hier eine spezielle Regel D mit folgenden Eigenschaften verstehen:

(i) Aus $\alpha \in Er[L, D]$ und $\alpha \in s(L)$ folgt $\alpha \in L$.

(ii) Fur jeden Ausdruck $\alpha \in s(Er[L, D])$ gibt es einen Ausdruck $\beta \in sL$, da $\alpha_{Er[L,D]} = \beta$ (d.h. daß $\alpha \rightarrow \beta \in Er[L, D]$ und $\beta \rightarrow \alpha \in Er[L, D]$).

(iii) Ist D eine Anschlie ungaregel fur eine Menge M, dann kommt a in jeden Ausdruck von M vor.

Eine zulässige Definition heißt effektiv, wenn es eine effektive Eliminationsmethode gibt, die von jedem Ausdruck $\alpha \in s(Er[L, D])$ in dem das definierte Symbol vorkommt, zu genau einem Ausdruck $\beta \in s(L)$ mit der Eigenschaft $\alpha_{Er[L,D]} = \beta$ führt. Gibt es eine Menge $\underline{D}$ von zulässigen Definitionen aller KOnstanten de rTheorie L auf Grund der Theorie L_1 bzg. einer Implikation $\rightarrow_{L_1}$, so daß $L \subseteq Er[L_1, \underline{D}]$, dann heiße die Theorie L in L_1 bzg. $\rightarrow_{L_1}$ interpretierbar. Jede solche Menge $\underline{D}$ nennt man Interpretation der Theorie L in L_1 bzg. $\rightarrow_{L_1}$. Sind alle zu $\underline{D}$ gehörenden Definitionen effektiv, so sprechen wir von einer effektiven Interpretierbarkeit und einer effektiven Interpretation.

LEMMA. *Ist L effektiv interpretierbar in L_1, so gibt es für jede effektive Interpretation $\underline{D}$ der Theorie L in L_1 wenigstens eine rekursive Function I mit folgenden Eigenschaften:*

a) Für beliebigen Ausdruck $\alpha \in s(L)$ gilt $I(\alpha) \in s(L_1)$, $\alpha_{Er[L_1,D]} = I(\alpha)$ und $I(\alpha)$ entsteht aus α durch Elimination der Konstanten der Theorie L auf Grund der Theorie $Er[L_1, \underline{D}]$ in einer bestimmten Ordnung.

b) Ist $\alpha \in L$, so ist $I(\alpha) \in L_1$.

Jede solche Funktion I nennen wir Interpretationsfunktion für $\underline{D}$. In Falle, wenn L in L_1 interpretierbar ist, aber nicht affektiv, kommt man mit dem Auswahlaxiom zu ähnlichen Funktionen, die aber nich rekursiv sind.

Es sei I_1 eine Interpretationsfunktion fur eine beliebige Interpretation (bzw. effektive Interpretation) $\underline{D}_1$ der Theorie L_1 in L_2 bzg. $\rightarrow_{L_2}$, und I_2

eine Interpretationsfunktion fur eine beliebige Interpretation (bzw. effektive Interpretation) $\underline{D}_2$ der Theorie L_2 in L_1 bzg. $\rightarrow_{L_1}$.

Erfullen I_1 und I_2 folgende Bedingungen:

(A_1) $\alpha =_{L_1} I_2 I_1(\alpha)$,
(A_2) $\beta =_{L_2} I_1 I_2(\beta)$

und übergehen die Implikationen $\rightarrow_{L_1}$, $\rightarrow_{L_2}$ unter $\underline{D}_1$, $\underline{D}_2$ ineinander, so sagt man, daß $\langle I_1, I_2 \rangle$ ein equivalenzfestsetzendes Paar von Interpretationsfunktionen fur die Interpretationen (bzw. effektiven Interpretationen) $\underline{D}_1$, $\underline{D}_2$ der Theorien L_1, L_2 bzg. $\rightarrow_{L_1}$, $\rightarrow_{L_2}$ ist. Die Theorien L_1, L_2 heißen äquivalent (bzw. effektiv äquivalent) bzg. $\rightarrow_{L_2}$, $\rightarrow_{L_2}$, wenn es solche $\underline{D}_1$, $\underline{D}_2$, I_1, I_2 gibt, daß $\langle I_1, I_2 \rangle$ ein äquivalenzfestsetzendes Paar von Interpretationsfunktionen für die Interpretationen (bzw. effektiven Interpretationen) $\underline{D}_1$, $\underline{D}_2$ der Theorien L_1, L_2 bzg. $\rightarrow_{L_1}$, $\rightarrow_{L_2}$ ist.

LEMMA. *$\langle I_1, I_2 \rangle$ ist ein äquivalenzfestsetzendes Paar von Interpretationsfunktionen für $\underline{D}_1$, $\underline{D}_2$ genau dann, wenn jedes Parr von Interpretationsfunktionen für $\underline{D}_1$, $\underline{D}_2$ ein äquivalenzfestsetzendes Paar ist.*

Die Bezeichnung $\langle L_1, \rightarrow_{L_1} \rangle \sim \langle L_2, \rightarrow_{L_2} \rangle$ bedeutet, daß die Theorien L_1, L_2 bzg. $\rightarrow_{L_1}$, $\rightarrow_{L_2}$ äquivalent sind. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation uber der Menge aller Paare $\langle L, \rightarrow_L \rangle$ mit $L \in T$ und $\rightarrow_L$ als Implikation der Theorie L.

Die durch die Relation $\sim$ erzeugten Äquivalenzklassen nennen wir Theorien im erweiterten Sinne.

Man könnte nun eine Reihe von Sätzen angeben, die eine gewisse Rechtfertigung der Erklärung des Begriffs der Theorie im erweiterten Sinne bilden. Diese Arbeit hat aber keinen eingehenden Charakter. Es sei erwähnt, daß sich alle Lemmata und Sätze außer den Satzen 4, 5, 6, die in [2] bewiesen wurden, auf die verallgemainerten Begriffe übertragen lassen. Den Satzen 4, 5, 6 entsprechen dagegen schwächere Sätze. Auf Grund des Satzes von Craig [1] spielt aber diese Abschwächung oft keine Rolle. Man kommt nämlich zu einem Resultat, den wir hier nicht präzisierter Form darstellen:

Sind zwei Theorien L, L' effektiv äquivalent und ist L axiomatisierbar, wobei die Axiome und Regeln bekannt sind, so ist unter einigen Voraussetzungen die Theorie L' auch axiomatisierbar und man kann Axiome und Regeln angeben.

References

[1] W. Craig, *On axiomatizability within a system*, **Journal Symb. Logic** 18 (1953), pp. 30–32.

[2] J. Kotas, A. Pieczkowski, *Allhemaine logische und mathematische Theorien*, **Zeitschr. f. math. Logik u. Grundlagen d. Math. Band** 16 (1970), pp. 353–376.

Institute of Mathematics
Nicholas Copernicus University
Toruń